

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

	<b>Рабочая программа дисциплины (модуля)</b>
<b>по дисциплине:</b>	Теория вероятностей
<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
<b>курс:</b>	2
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Экзамен

Аудиторных часов: 60 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 45 час.

Подготовка к экзамену: 30 час.

Всего часов: 135, всего зач. ед.: 3

Количество контрольных работ, заданий: 4

Программу составили:

С.А. Гуз, канд. физ.-мат. наук, доцент

О.Г. Горбачев, канд. физ.-мат. наук, доцент

А.В. Гасников, д-р физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры математических основ управления 15.05.2023

## Аннотация

В курсе рассматриваются ключевые понятия, методы и результаты теории вероятностей как части вероятностно-статистического блока дисциплин, читаемых студентам МФТИ. Прежде всего, на базе аксиоматики Колмогорова вводится понятие вероятностного пространства и рассматриваются его основные свойства, включая свойство непрерывности вероятности, закон «0-1» Колмогорова, единственность продолжения вероятностной меры с алгебры на минимальную сигма-алгебру.

Основная часть курса посвящена изучению случайных величин и их свойств. Вводится понятие функции распределения случайной величины. Рассматривается распределение Бернулли, геометрическое и биномиальное распределение. Простейший поток событий и распределение Пуассона. Показательное, равномерное, нормальное, log-нормальное и отрицательно-биномиальное распределения. Бета-распределение и гамма-распределение и ряд других.

Дано определение математического ожидания случайной величины как интеграла Лебега-Стилтьеса. Рассмотрены свойства математического ожидания как в общем случае, так и на примере таких числовых характеристик случайных величин, как ковариация и дисперсия.

Вводится аппарат характеристических функций, с помощью которого доказывается теорема Муавра-Лапласа.

Рассмотрены различные типы сходимости последовательностей случайных величин с вероятностью единица (почти, наверное), в среднем порядка  $p$ , по вероятности, по распределению. Исследованы соотношения между различными типами сходимости, фундаментальность по Коши сходимости почти, наверное.

Рассмотрены основные результаты, связанные с простым и усиленным законом больших чисел. Теоремы Колмогорова, Хинчина и Чебышева.

Получены основные результаты, связанные со свойством асимптотической нормальности. Условия Линдберга и Ляпунова. Теорема Линдберга-Леви. Центральная предельная теорема. Теорема Натана для суммы случайных величин в случайном количестве.

Для успешного освоения курса слушателю желательно знать и владеть основами математического анализа, комбинаторики и линейной алгебры.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

формирование у студентов знаний и навыков работы с понятиями теории вероятностей.

### Задачи дисциплины

- освоение студентами базовых знаний (понятий, методов и моделей) теории вероятностей;
- приобретение теоретических знаний и практических умений и навыков в области теории вероятностей;
- оказание консультаций и помощи студентам в проведении собственных теоретических исследований в области теории вероятностей.

## 2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности

<p>решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты</p>	<p>ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели</p>
	<p>ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты</p>

### 3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- фундаментальные понятия теории вероятностей;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла теории вероятностей;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории вероятностей.

уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить решения задач теории вероятностей, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области теории вероятностей в устной и письменной форме.

владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач теории вероятностей (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов теории вероятностей;
- предметным языком теории вероятностей и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

### 4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Основные понятия теории вероятностей.	2	2		4
2	Аксиоматика теории вероятностей.	3	3		4
3	Свойства вероятностного пространства.	3	3		4
4	Случайная величина как объект теории вероятностей.	3	3		4
5	Основные виды случайных величин.	3	3		4

6	Интеграл Стильеса и его свойства. Моментные характеристики случайных величин.	3	3		4
7	Случайный вектор и его свойства.	3	3		4
8	Аппарат характеристических функций.	3	3		4
9	Типы сходимости случайных величин.	3	3		4
10	Закон больших чисел.	2	2		4
11	Предельные теоремы.	2	2		5
Итого часов		30	30		45
Подготовка к экзамену		30 час.			
Общая трудоёмкость		135 час., 3 зач.ед.			

#### 4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

##### Семестр: 4 (Весенний)

##### 1. Основные понятия теории вероятностей.

Интуитивные предпосылки теории вероятностей.

Множество элементарных исходов опыта, событие.

Классическое и геометрическое определение вероятности.

##### 2. Аксиоматика теории вероятностей.

Аксиоматическое определение вероятности. Алгебра и сигма-алгебра событий. Борелевская сигма-алгебра. Аксиомы теории вероятностей и следствия из них. Вероятностное пространство. Теорема непрерывности вероятности. Теорема сложения вероятностей.

##### 3. Свойства вероятностного пространства.

Зависимые и независимые события. Условная вероятность события. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Леммы Бореля-Кантелли. Формула включений-исключений.

##### 4. Случайная величина как объект теории вероятностей.

Случайная величина как измеримая функция. Функция распределения случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Плотность распределения вероятностей.

##### 5. Основные виды случайных величин.

Конкретные распределения случайных величин. Схема Бернулли, геометрическое и биномиальное распределение. Простейший поток событий и распределение Пуассона. Показательное, равномерное, нормальное, log-нормальное и отрицательно-биномиальное распределения. Бета-распределение и гамма-распределение.

##### 6. Интеграл Стильеса и его свойства. Моментные характеристики случайных величин.

Интеграл Стильеса и его свойства. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины. Моменты случайной величины. Условное математическое ожидание. Коэффициент корреляции двух случайных величин.

##### 7. Случайный вектор и его свойства.

Случайный вектор. Функция распределения случайного вектора. Зависимые и независимые случайные величины, условные законы распределения. Корреляционная матрица случайного вектора. Функции случайных величин. Невырожденное функциональное преобразование случайного вектора.

#### 8. Аппарат характеристических функций.

Аппарат характеристических функций. Характеристическая функция и ее свойства. Связь моментов случайной величины с ее характеристической функцией. Разложение характеристической функции в ряд. Производящая функция и ее свойства для дискретных случайных величин. Связь моментов и вероятностей дискретной случайной величины с ее производящей функцией. Разложение производящей функции в ряд. Связь характеристических и производящих функций.

#### 9. Типы сходимости случайных величин.

Сходимость последовательностей случайных величин с вероятностью единица (почти, наверное), в среднем квадратичном, по вероятности, по распределению. Соотношение между различными типами сходимости.

#### 10. Закон больших чисел.

Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Критерий Колмогорова. Теоремы Хинчина и Чебышева. Усиленный закон больших чисел. Теоремы Колмогорова и Бореля. Неравенство Бернштейна. Оценивание скорости сходимости частоты к вероятности в схеме Бернулли.

#### 11. Предельные теоремы.

Интегральная и локальная теоремы Муавра–Лапласа. Дискретная поправка. Теорема Линдберга. Теорема Натана для суммы случайных величин в случайном количестве. Центральная предельная теорема. Условие Ляпунова. Теорема Гливленко.

### 5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиапроектором и экраном.

### 6. Перечень рекомендуемой литературы

#### Основная литература

1. Теория вероятностей [Текст] : учеб. пособие для вузов / А. А. Натан, О. Г. Горбачев, С. А. Гуз ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МЗ Пресс, 2007 .— 253 с.
2. Теория вероятностей [Текст] / А. А. Боровков .— М. : Едиториал УРСС, 2003 .— 472 с.
3. Курс теории вероятностей [Текст] : учебник для вузов / Б. В. Гнеденко ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова .— 10-е изд. доп. — М. : ЛИБРОКОМ, 2011 .— 485 с.

#### Дополнительная литература

1. Сборник задач по теории вероятностей [Текст] : учеб. пособ для вузов / А. М. Зубков, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков .— 2-е изд. испр. и доп. — М. : Наука, 1989 .— 319 с.

### 7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<http://www.mou.mipt.ru>

**8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

Не предусмотрено.

**9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Студент, изучающий курс "Теория вероятностей", должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

В результате изучения дисциплины студент должен знать основные определения, понятия, аксиомы, методы доказательств.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса приведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы;
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам на практических занятиях и в качестве курсового задания;
- подготовку к практическим занятиям, экзамену.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи. Для формирования умения применять теоретические знания на практике студенту необходимо решать как можно больше задач. При решении задач каждое действие необходимо аргументировать, ссылаясь на известные теоретические сведения.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания. При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

<b>по направлению:</b>	Прикладная математика и информатика
<b>профиль подготовки:</b>	Прикладная математика, компьютерные науки и инженерия Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики кафедра математических основ управления
<b>курс:</b>	<u>2</u>
<b>квалификация:</b>	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 4 (весенний) - Экзамен

**Разработчики:**

С.А. Гуз, канд. физ.-мат. наук, доцент  
О.Г. Горбачев, канд. физ.-мат. наук, доцент  
А.В. Гасников, д-р физ.-мат. наук, доцент

## 1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты

## 2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Теория вероятностей» обучающийся должен:

### знать:

- фундаментальные понятия теории вероятностей;
- понятия, аксиомы, методы доказательств и доказательства основных теорем в разделах, входящих в базовую часть цикла теории вероятностей;
- основные свойства соответствующих математических объектов;
- аналитические и численные подходы и методы для решения типовых прикладных задач теории вероятностей.

### уметь:

- понять поставленную задачу;
- использовать свои знания для решения фундаментальных и прикладных задач;
- оценивать корректность постановок задач;
- строго доказывать или опровергать утверждение;
- самостоятельно находить решения задач теории вероятностей, в том числе и нестандартных, и проводить их анализ;
- самостоятельно видеть следствия полученных результатов;
- точно представить математические знания в области теории вероятностей в устной и письменной форме.

### владеть:

- навыками освоения большого объема информации и решения задач теории вероятностей (в том числе, сложных);
- навыками самостоятельной работы и освоения новых дисциплин;
- культурой постановки, анализа и решения математических и прикладных задач, требующих для своего решения использования математических подходов и методов теории вероятностей;
- предметным языком теории вероятностей и навыками грамотного описания решения задач и представления полученных результатов.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по теме прошлого занятия.



#### 4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Перечень контрольных вопросов:

1. Точка бросается «наудачу» на отрезок  $[0,1]$   $N$  раз. Если  $X(1), \dots, X(N)$  – координаты точек, найти  $P(X(1) < X(2) < \dots < X(N))$ .
2. Как связаны свойства счетной аддитивности и непрерывности вероятности?
3. Дать определение алгебры и сигма-алгебры. Что такое минимальная сигма-алгебра?
4. Доказать, что пересечение двух сигма-алгебр является сигма-алгеброй.
5. Определение вероятностного пространства, свойства вероятностной меры. Привести пример вероятностного пространства, в котором вероятность любого элементарного события равно нулю.
6. Вероятностное пространство задано на конечном множестве исходов, каждый из которых имеет ненулевую вероятность. Можно ли утверждать, что теоретико-множественная операция «симметрическая разность» на элементах сигма-алгебры данного вероятностного пространства задает метрику?
7. Вероятностная мера задана на множестве элементов борелевской сигма-алгебры. Верно ли, что все события на данном вероятностном пространстве зависимы?
8. Парная независимость и независимость в совокупности случайных событий, их взаимосвязь.
9. Определение случайной величины. Определение и свойства функции распределения. Функция распределения случайной величины имеет разрывы в точках вида  $1/n$ ,  $n=1,2,\dots$ . Является ли соответствующая случайная величина непрерывной (дискретной)?
10. Может ли сигма-алгебра, порожаемая случайной величиной, не совпадать с сигма-алгеброй вероятностного пространства, на котором определена данная случайная величина.
11. Свойства математического ожидания и дисперсии случайной величины. Выразить второй начальный момент случайной величины через математическое ожидание и дисперсию.
12. Парная независимость и независимость в совокупности случайных величин, их взаимосвязь. Коэффициент корреляции и его свойства.
13. Дискретная случайная величина принимает целочисленные неотрицательные значения.
14. Выразить математическое ожидание такой случайной величины через значения ее функции распределения в точках  $1,2,3,\dots$ .
15. Определение интеграла Стильеса-Римана и его основные свойства. Чему равен интеграл Стильеса от константы?
16. Дискретная случайная величина принимает целочисленные значения с известными вероятностями. Чему равен интеграл Стильеса по множеству  $[0,1)$ ?
17. Определение случайного вектора. Определение и свойства функции распределения случайного вектора.
18. Математическое ожидание, корреляционная матрица случайного вектора.
19. Привести пример случайного вектора, для которого свойство некоррелированности компонент тождественно свойству их независимости.
20. Определение характеристической функции и ее основные свойства. Привести пример последовательности характеристических функций, слабо сходящейся к функции, не являющейся характеристической.
21. Может ли быть характеристической функцией какой-либо случайной величины функция, равная единице на интервале  $(-1,1)$  и нулю вне этого интервала?
22. Типы сходимости случайных величин и соотношение между ними.
23. Может ли последовательность непрерывных случайных величин сходиться по распределению к дискретной случайной величине? А наоборот?
24. Приведите случайную величину, для которой неравенство Чебышева превращается в равенство.
25. Закон больших чисел усиленный закон больших чисел – в чем разница?
26. Критерий Колмогорова для закона больших чисел. Достаточные условия в форме Маркова, Чебышева и Хинчина.
27. Можно ли утверждать, что достаточное условие в форме Чебышева является следствием достаточного условия в форме Маркова?

28. Можно ли утверждать, что достаточное условие в форме Хинчина является следствием достаточного условия в форме Маркова?
29. Усиленный закон больших чисел – первая и вторая теорема Колмогорова.
30. Можно ли утверждать, что достаточное условие в форме Чебышева является следствием первой теоремы Колмогорова?
31. Можно ли утверждать, что достаточное условие в форме Хинчина является следствием второй теоремы Колмогорова?
32. Неравенство Бернштейна. Используя неравенство Бернштейна и достаточное условие сходимости почти наверное, доказать теорему Бореля.
33. Сформулировать интегральную теорему Муавра-Лапласа. Пояснить ее связь с локальной теоремой.
34. Сформулировать теорему Линдберга. Привести пример последовательности независимых случайных величин, для которых условие Линдберга выполнено, а условие асимптотической нормальности – нет.
35. Сформулировать и доказать центральную предельную теорему, опираясь на теорему Линдберга.
36. Доказать асимптотическую нормальность случайной величины, имеющей хи-квадрат распределение.
37. Сформулировать и доказать достаточное условие асимптотической нормальности в форме Ляпунова, опираясь на теорему Линдберга.
38. Сформулировать достаточное условие асимптотической нормальности в форме Натана.
39. Сформулировать теорему Гливленко.

#### Билет 1:

1. Типы сходимости случайных величин и соотношение между ними.
2. Может ли последовательность непрерывных случайных величин сходиться по распределению к дискретной случайной величине? А наоборот?

#### Билет 2:

1. Свойства математического ожидания и дисперсии случайной величины. Выразить второй начальный момент случайной величины через математическое ожидание и дисперсию.
2. Попарная независимость и независимость в совокупности случайных величин, их взаи-мосвязь. Коэффициент корреляции и его свойства.

#### Критерии оценивания

##### Оценка

отлично 10 оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений

отлично 9 оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений

отлично 8 оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений

хорошо 7 оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

хорошо 6 оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

хорошо 5 оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

удовлетворительно 4 оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

удовлетворительно 3 оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

неудовлетворительно 2 оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач

неудовлетворительно 1 оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубейшие ошибки в формулировках базовых понятий дисциплины и вообще не имеет навыков решения типовых практических задач.

## **5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

Во время проведения экзамена обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также калькулятором (при необходимости).

Экзамен проводится путем организации специального опроса, проводимого в устной форме. Успешная сдача заданий является необходимым условием сдачи экзамена.